Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemáticas


Segundo Curso de Ingeniería Industrial.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES    Examen de 11 de junio de 2008.

Las preguntas 1 y 4 se valorarán sobre un máximo de **2 puntos** y las preguntas 2 y 3 sobre un máximo de **3 puntos**. Entregar las preguntas en hojas separadas.
**Tiempo: 3,5 horas.**

**Problema 1** Resolver el siguiente problema en el rectángulo:

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} = 0\,, \quad 0 < x < \pi/2,\ 0 < y < \pi\,, \\ u(0, y) = u(\pi/2, y) = 0\,, \\ u(x, \pi) = 0\,, \\ u(x, 0) = 2\,\mathrm{sen}\,6x\,. \end{cases}$$

**Problema 2** Considerar el siguiente problema para la ecuación de ondas en un intervalo:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}\,, \qquad 0 < x < L\,, \\ u(0, t) = \cos\omega t\,,\ u(L, t) = 0\,, \\ u(x, 0) = x/L - 1\,, \\ u_t(x, 0) = 0\,. \end{cases}$$

(a) Transformar el problema en otro con condiciones de contorno homogéneas.
(b) Encontrar la solución del problema.
(c) Indicar para qué valores de $\omega$ hay resonancia.

AYUDA:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{n\pi}\,.$$

**Problema 3** (a) Estudiar para qué valores del parámetro $\beta$, el problema

$$\begin{cases} \phi'' + \phi + \lambda\phi = 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, \\ \phi(0) = \phi'(0)\,, \\ \phi(\pi) = \beta\,\phi'(\pi)\,, \end{cases}$$

tiene $\lambda = 0$ como autovalor.

(b) Estudiar, en función del parámetro $\beta$, la existencia de solución del problema

$$\begin{cases} u'' + u = f(x)\,, \quad 0 < x < \pi\,, \\ u(0) = u'(0)\,, \\ u(\pi) = \beta\,u'(\pi)\,. \end{cases}$$

(c) Calcular la función de Green del problema anterior, en el caso $\beta = -1$.

**Problema 4** (a) Dada la función

$$f(x) = |x|\,H(a-|x|) = \begin{cases} |x|, & \text{si } |x| \le a, \\ 0, & \text{si } |x| > a, \end{cases}$$

donde $H$ es la función salto de Heaviside y $a > 0$ es un parámetro, representarla gráficamente y calcular su transformada de Fourier.

(b) Resolver por transformada de Fourier el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\pi[\delta(x-t) + \delta(x+t) - \delta(x)] & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

AYUDA: Una solución particular de la ecuación diferencial $y''(x) = -s^2 y + 2\cos(sx) - 1$ tiene la forma $y(x) = C + Dx\sin(sx)$ para constantes $C$ y $D$ adecuadas.